



FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS DA BAHIA

## FATEC-BA – FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS DA BAHIA

Componente Curricular: Cálculo II

Docente: Luiz Henrique Menezes de Lima Semestre: 2022.2

Data: 29 de Novembro de 2022 Curso: Engenharia – 3º Semestre

Discente: \_\_\_\_\_

AVA 03 (0,0 A 8,0)	
Relato de Experiência (0,0 A 2,0)	
TOTAL DA NOTA DA 3º UNIDADE	

### AVALIAÇÃO – 3º BIMESTRE

*“Acerte em tudo que puder acertar. Mas não se torture com seus erros.”*

*Paulo Coelho*

#### Questão 01: (Valor:2,5)

Resolva a integral fracionária :  $\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx$

#### Questão 02: (Valor:2,5)

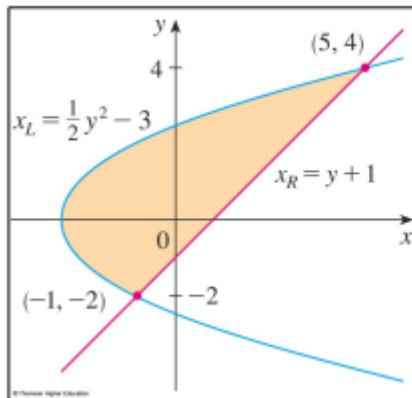
Resolva a integral fracionária :  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx$

#### Questão 03: ( Valor: 3,0)

Trace a região limitada pela parábola  $y^2 = 2x + 6$  e pela reta  $x = y - 1$ , calcule a área no intervalo  $[-2, 4]$

## Resolução das Questões

### Questão 03



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 (x_R - x_L) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left[ (y+1) - \left( \frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right] dy \\ &= \int_{-2}^4 \left( -\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right) dy \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{y^3}{3} \right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg|_{-2}^4 \\ &= -\frac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left( \frac{4}{3} + 2 - 8 \right) = 18 \end{aligned}$$

## Questão 01

### Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx.$$

A decomposição em frações parciais assume a forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

MAT146 - Cálculo I - Integração por Frações Parciais

Método de integração: frações parciais

Para encontrar os valores dos coeficientes  $A$ ,  $B$ , e  $C$ , desenvolvemos a igualdade acima obtendo

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2 + 4x + 3) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x^2 - 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos dois polinômios da igualdade acima, obtemos o seguinte sistema:

$$\text{Coeficiente de } x^2: \quad A + B + C = 1$$

$$\text{Coeficiente de } x^1: \quad 4A + 2B = 4$$

$$\text{Coeficiente de } x^0: \quad 3A - 3B - C = 1.$$

Resolvendo, temos

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C = -\frac{1}{4}.$$

Para resolver este sistema, podemos usar várias técnicas, por exemplo, escalonamentos, isolando variáveis e substituir esta variável em outra equação do sistema ou substituição numérica.

Por exemplo, substituindo  $x = 1$  em ambos os lados da igualdade, achamos o valor de  $A$ , da seguinte forma:

$$6 = 8A + 0B + 0C, \quad \text{ou seja} \quad A = \frac{3}{4}.$$

Substituindo  $x = -1$  e  $x = -3$  encontraremos de forma análoga os valores de  $B$  e  $C$ .

MAT146 - Cálculo I - Integração por Frações Parciais

UFV

Método de integração: frações parciais

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx &= \int \frac{3}{4} \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} dx \\ &\quad + \int -\frac{1}{4} \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

## Questão 02

### Exemplo

Use frações parciais para calcular

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}.$$

Obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= Ax(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\ &+ C(x^2(x^2 - 4x + 4)) + \frac{7}{4}x^2 + Dx^3 - 2Dx^2 \\ &= (A + C)x^4 + \left(\frac{1}{8} - 6A + D - 4C\right)x^3 \\ &+ \left(-\frac{3}{4} + 12A + \frac{7}{4} - 2D + 4C\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} - 8A\right)x - 1. \end{aligned}$$

MAT146 - Cálculo I - Integração por Frações Parciais

UFV

MAT146 - Cálculo I - Integração por Frações Parciais

UFV

Método de integração: frações parciais

Método de integração: frações parciais

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima pelo mínimo múltiplo comum, temos

$$x^3 - 1 = A(x(x-2)^3) + B(x-2)^3 + C(x^2(x-2)^2) + D(x^2(x-2)) + Ex^2.$$

Substituindo  $x = 0$  na igualdade acima obtemos

$$-1 = -8B, \quad \text{ou seja,} \quad B = \frac{1}{8}.$$

Substituindo  $x = 2$  na igualdade acima obtemos

$$7 = 4E, \quad \text{ou seja,} \quad E = \frac{7}{4}.$$

Falta agora encontrar os valores de  $A$ ,  $C$  e  $D$ . Neste caso, devemos desenvolver a igualdade acima, agrupar os coeficientes e montar o sistema, usando igualdade de polinômios.

Igualando os coeficientes de mesma potência de  $x$ , obtemos

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \frac{1}{8} - 6A + D - 4C = 1 \\ -\frac{3}{4} + 12A + \frac{7}{4} - 2D + 4C = 0 \\ \frac{3}{2} - 8A = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos

$$A = \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{16} \text{ e } D = \frac{5}{4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx &= \frac{3}{16} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{3}{16} \int \frac{1}{(x-2)} dx \\ &+ \frac{5}{4} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{(x-2)^3} dx \\ &= \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{1}{8x} - \frac{3}{16} \ln|x-2| - \frac{5}{4(x-2)} \\ &+ \frac{7}{8(x-2)^2} + C. \end{aligned}$$